C.7 · Unidad 7 · Estructuras algebraicas: operaciones binarias, grupos, anillos y campos (solo Plan 2010)

1er final 2010-2, turno matutino, problema 6: El enunciado presenta el segundo grupo como $(\mathbb{R}, \#)$, pero la función va de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^+$ ($10^a > 0$): el segundo grupo es $(\mathbb{R}^+, \#)$. En el ejercicio 7.5.8 se escribe así.

2º final 2013-1, tipo A, problema 6: El inciso b) pide demostrar que la operación es cerrada en T, pero no lo es: $3m+3n+4$ nunca es múltiplo de 3 (por ejemplo, $9 \star 6 = 19$). En el ejercicio propuesto 7.6.1 se pregunta si es cerrada y se omite el inciso de asociatividad, que en T no tiene sentido sin cerradura.

5. $\det A = 3(4) + (-4)(2) + (-1)(-2) = 6$.
6. $\operatorname{adj} A$ es la matriz de cofactores transpuesta:

$$\operatorname{adj} A = \begin{bmatrix} 4 & -16 & 11 \\ 2 & -14 & 10 \\ -2 & 8 & -7 \end{bmatrix}.$$

Resultado: a) $a = 2$, $b = -7$, $c = -5$. b) $A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4 & -16 & 11 \\ 2 & -14 & 10 \\ -2 & 8 & -7 \end{bmatrix}$.

6.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.6**.

Ejercicio propuesto 6.6.1

Adaptado de: 1er final 2013-2, tipo B, problema 5.

Obtenga la matriz X que satisface $XB - \det(C)\,C = \operatorname{tr}(B)\,XA$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}.$$

Resultado: $X = \begin{bmatrix} \frac{i}{20} & 0 \\ 0 & \frac{i}{8} \end{bmatrix}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 106.

Ejercicio propuesto 6.6.2

Adaptado de: 2º final 2013-2, tipo A, problema 5.

Obtenga, si existe, la matriz X que satisface $BX - C^T = -DX - A$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Resultado: $X = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 7 & -23 \\ -14 & 17 \end{bmatrix}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 106.

Ejercicio propuesto 6.6.3

Adaptado de: 2º final 2014-1, tipo A, problema 5.

Dadas

$$A = \begin{bmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 2i \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix},$$

B.2 Simulacros

Cada simulacro reúne un ejercicio propuesto por unidad, en el orden del examen de tu plan. Resuélvelo en **2 horas**, sin calculadora y sin ver el cuaderno; después califícalo con las resoluciones del Apéndice E.

Simulacro	1	2	3	4	5	6
Plan 2010, 1	2.6.1	3.6.1	4.6.6	5.6.2	6.6.1	7.6.2
Plan 2010, 2	2.6.5	3.6.4	4.6.1	5.6.4	6.6.3	7.6.3
Plan 2016, 1	1B.6.1	2.6.3	3.6.5	4.6.5	5.6.5	6.6.5
Plan 2016, 2	1B.6.2	2.6.6	3.6.6	4.6.2	5.6.6	6.6.6

Las columnas 1 a 6 son los problemas del examen; los números son de ejercicios propuestos (sección 6 de cada unidad). Cuatro problemas del primer simulacro del Plan 2010 (2.6.1, 3.6.1, 4.6.6 y 5.6.2) vienen del mismo examen real, el 1er final 2014-1, tipo A.

6.7 Errores frecuentes

- **Dividir entre una matriz.** No existe «$X = N/M$». Se multiplica por M^{-1}, y del lado correcto.
- **Multiplicar por la inversa del lado equivocado.** De $XM = N$ sale $X = NM^{-1}$, no $M^{-1}N$. Con $AB \neq BA$, el resultado es otro.
- **Factorizar X de lados distintos.** $AX + XB$ no es $(A + B)X$.
- **Olvidar la identidad.** $XA - 2X$ es $X(A - 2I)$, no $X(A - 2)$.
- **Confundir** $\det(kA)$ **con** $k \det A$**.** En orden n, $\det(kA) = k^n \det A$.
- **Transponer mal un producto.** $(AB)^T = B^T A^T$: se invierte el orden.
- **Olvidar conjugar en A^*.** A^* es la transpuesta **de la conjugada**; solo si A es real coincide con A^T.
- **Adjunta sin transponer.** adj A es la matriz de cofactores **transpuesta**.
- **Signo del cofactor.** $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$: en C_{23} el signo es negativo.
- **Responder la condición al revés.** «Para que exista A^{-1}» pide $\det A \neq 0$: todos los valores menos las raíces.

6.8 Formulario de emergencia de la unidad

- $MX = N \Rightarrow X = M^{-1}N \cdot XM = N \Rightarrow X = NM^{-1} \cdot XA - XB = X(A - B) \cdot kX = kIX$
- $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \cdot [\, A \mid I \,] \to [\, I \mid A^{-1} \,]$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \cdot (AB)^T = B^T A^T \cdot A^* = \bar{A}^T \cdot (A^T)^T = A$
- $\operatorname{tr} A = \sum a_{ii} \cdot \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA) \cdot \operatorname{tr} A^T = \operatorname{tr} A$
- $\det(AB) = \det A \det B \cdot \det A^{-1} = 1/\det A \cdot \det A^T = \det A \cdot \det(kA) = k^n \det A$
- $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \cdot \det A = \sum_j a_{ij} C_{ij} \cdot \operatorname{adj} A = [C_{ij}]^T \cdot A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A$
- Simétrica $A^T = A \cdot$ antisimétrica $A^T = -A \cdot$ ortogonal $A^{-1} = A^T \cdot$ hermitiana $A^* = A \cdot$ unitaria $A^{-1} = A^*$
- A^{-1} existe $\iff \det A \neq 0$

6.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Escribe primero el despeje con letras, hasta $X = M^{-1}N$ o $X = NM^{-1}$. Ese paso vale buena parte de los puntos.
2. Calcula los números (det, tr) y las matrices auxiliares (A^*, A^T, adj) por separado, cada una en su renglón.
3. Comprueba $\det M \neq 0$ antes de invertir.
4. Haz la multiplicación final con cuidado, renglón por columna, y comprueba un elemento en la ecuación original.
5. En los determinantes grandes, marca la línea con más ceros y escribe el signo $(-1)^{i+j}$ de cada término.

- **Tipo A:** (1) trigonometría (distancia) [U1B]; (2) desigualdad [U2]; (3) ecuación en forma polar [U3]; (4) raíz de multiplicidad 2 (parámetro) [U4]; (5) planteamiento (prototipos) [U5]; (6) cofactores e inversa por adjunta [U6; ejercicio 6.5.8].
- **Tipo C:** (1) trigonometría (distancia) [U1B]; (2) desigualdad [U2]; (3) ecuación en forma polar [U3]; (4) raíz de multiplicidad 2 (parámetro) [U4]; (5) construir un sistema dada su solución [U5]; (6) propiedad del determinante (demostración) [U6].

1er final 2018-1

- **Tipo A:** (1) trigonometría (triángulo) [U1B; propuesto 1B.6.4]; (2) inducción [U2]; (3) ecuación en forma binómica [U3]; (4) coeficientes por divisibilidad y punto [U4]; (5) sistema con parámetro k [U5]; (6) ecuación matricial con traza y diag [U6].
- **Tipo B:** (1) trigonometría (triángulo) [U1B]; (2) inducción [U2]; (3) ecuación en forma binómica [U3]; (4) coeficientes por divisibilidad y punto [U4]; (5) sistema con parámetro [U5]; (6) ecuación matricial [U6].
- **Tipo C:** (1) trigonometría (identidad) [U1B]; (2) desigualdad [U2]; (3) ecuación con datos en Argand [U3]; (4) raíces con factor dado [U4]; (5) sistema con parámetro [U5]; (6) determinante igual a cero ($a \in \mathbb{C}$) [U6; propuesto 6.6.5].
- **Tipo D:** (1) trigonometría (identidad) [U1B]; (2) desigualdad [U2]; (3) ecuación con datos en Argand [U3]; (4) raíces con factor dado [U4]; (5) sistema con parámetro [U5]; (6) determinante igual a cero [U6].

2º final 2018-1

- **Versión única:** (1) trigonometría (área) [U1B]; (2) desigualdad [U2]; (3) ecuación en C [U3; ejercicio 3.5.8]; (4) raíces con raíz compleja dada [U4; ejercicio 4.5.8]; (5) sistema con parámetro: compatible indeterminado [U5]; (6) existencia de la inversa (parámetro) [U6; ejercicio 6.5.7].

1er final 2018-2

- **Tipo A:** (1) trigonometría (ecuación) [U1B; ejemplo 1B.4]; (2) inducción [U2]; (3) igualdad de complejos (a, b) [U3]; (4) parámetro y raíces [U4]; (5) sistema con parámetro: incompatible [U5]; (6) ecuación matricial con $\det K$ [U6].
- **Tipo B:** (1) trigonometría (ecuaciones) [U1B]; (2) inducción [U2]; (3) igualdad de complejos [U3]; (4) parámetro y raíces [U4]; (5) sistema con parámetro [U5]; (6) ecuación matricial [U6].
- **Tipo C:** (1) trigonometría (ecuación) [U1B; propuesto 1B.6.1]; (2) desigualdad [U2]; (3) ecuación con datos en Argand [U3]; (4) coeficientes y raíces [U4; propuesto 4.6.5]; (5) sistema homogéneo: conjunto solución [U5; propuesto 5.6.6]; (6) ecuación matricial [U6].
- **Tipo D:** (1) trigonometría (ecuación) [U1B]; (2) desigualdad [U2]; (3) ecuación con datos en Argand [U3]; (4) coeficientes y raíces [U4]; (5) sistema homogéneo [U5]; (6) ecuación matricial [U6].

2º final 2018-2

- **Versión única:** (1) trigonometría (identidad) [U1B]; (2) inducción [U2]; (3) raíces cúbicas a partir de una dada [U3; ejercicio 3.5.6]; (4) Descartes, raíces racionales, raíz i [U4]; (5) conjunto solución [U5]; (6) ecuación matricial [U6].

1er final 2019-1

- **Tipo A:** (1) trigonometría (ecuaciones) [U1B; ejercicio 1B.5.2]; (2) desigualdad [U2]; (3) ecuación en C [U3]; (4) raíces con raíz dada [U4]; (5) conjunto solución [U5]; (6) ecuación matricial [U6].
- **Tipo B:** (1) trigonometría (ecuaciones) [U1B]; (2) desigualdad [U2]; (3) ecuación en C [U3]; (4) raíces con raíz dada [U4]; (5) conjunto solución [U5]; (6) ecuación matricial [U6].

2º final 2019-1

- **Versión única:** (1) trigonometría (ecuación) [U1B]; (2) inducción [U2]; (3) ecuación en C [U3]; (4) parámetro por valor del polinomio [U4]; (5) planteamiento (librería, 4 incógnitas) [U5; ejercicio 5.5.4]; (6) elementos a partir de A^{-1} y A^T [U6].

1. $(A, +)$ es un grupo abeliano; su idéntico es el *cero* del anillo;
2. la segunda operación es cerrada y asociativa;
3. la segunda operación es distributiva sobre la primera por los dos lados: $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$ y $(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$.

Tipos de anillo. *Conmutativo*, si la segunda operación conmuta. *Con unidad*, si la segunda operación tiene idéntico (la *unidad*, distinta del cero). Un *dominio entero* es un anillo conmutativo con unidad y sin divisores de cero: si $a \cdot b = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$. Ejemplo: $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

Campo. $(K, +, \cdot)$ es un *campo* si es un anillo conmutativo con unidad en el que todo elemento distinto del cero tiene inverso para la segunda operación. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ con la suma y el producto usuales son campos; $\mathbb{Z}$ no lo es (2 no tiene inverso multiplicativo en $\mathbb{Z}$).

Homomorfismo e isomorfismo. Una función $f : G \to H$ entre los grupos $(G, *)$ y $(H, \#)$ es un *homomorfismo* si

$$f(a * b) = f(a) \# f(b) \qquad \text{para todos } a, b \in G.$$

Si además es biyectiva, es un *isomorfismo*. Un homomorfismo lleva el idéntico de G al idéntico de H, y el inverso de a al inverso de $f(a)$.

7.2 Cómo reconocer el problema

Si el enunciado dice…	Se pide…	Procedimiento
«la operación está definida en la siguiente tabla»	propiedades leídas en la tabla	7.3.2
«$a * b = \ldots$ para todos $a, b \in A$», «calcular $9 * 6$»	evaluar y revisar propiedades	7.3.1
«¿es grupo?», «¿tiene estructura de grupo abeliano?», «qué propiedades no cumple»	los axiomas uno por uno	7.3.3
los elementos son pares ordenados (a, b)	lo mismo, componente por componente	7.3.3
«el sistema $(A, +, *)$ es anillo o campo; el cero, la unidad, los inversos»	idénticos e inversos de cada operación	7.3.4
«f es un isomorfismo; determinar la operación #»	operación inducida	7.3.5

7.3 Procedimientos

7.3.1 Operación dada con una regla

1. **Evaluar.** Sustituye en la regla. Si un operando no pertenece al conjunto, la operación *no está definida* para él.
2. **Cerradura.** Toma a, b genéricos de A con la forma que exige A ($a = 3m$, $a > 0$, $a = (x, y)$…) y comprueba que $a*b$ tiene esa misma forma. Si falla, basta **un contraejemplo numérico**.

- **Tipo B:** (1) inducción [U2]; (2) módulo de un complejo con parámetro [U3]; (3) factores lineales con una raíz dada [U4]; (4) planteamiento (cajas de tres productos) [U5]; (5) traza de la matriz que satisface una ecuación matricial [U6]; (6) campo: idéntico e inverso de la primera operación [U7].

2º final 2013-1

- **Tipo A:** (1) inducción [U2; ejercicio 2.5.2]; (2) ecuación con conjugado [U3; ejercicio 3.5.3]; (3) raíces de un polinomio a partir de una relación entre polinomios [U4; propuesto 4.6.3]; (4) planteamiento (armadora, tabla de horas-máquina) [U5; ejercicio 5.5.2]; (5) adjunta de la matriz que satisface una ecuación matricial [U6; propuesto 6.6.4]; (6) operación binaria: cálculo, cerradura, conmutatividad, asociatividad [U7; propuesto 7.6.1].
- **Tipo B:** (1) inducción [U2]; (2) ecuación con conjugado [U3]; (3) raíces de un polinomio a partir de una relación entre polinomios [U4]; (4) planteamiento (armadora) [U5]; (5) adjunta de la matriz que satisface una ecuación matricial [U6]; (6) operación binaria: idéntico izquierdo, conmutatividad, inverso derecho [U7; ejercicio 7.5.2].

1er final 2013-2

- **Tipo A:** (1) inducción (serie geométrica) [U2; ejemplo 2.4]; (2) raíces cúbicas con datos en cis y exponencial [U3; ejemplo 3.4]; (3) raíces de $x^8 + x^4 - 6$ y cota superior [U4; ejercicio 4.5.4]; (4) planteamiento (inversiones) [U5; propuesto 5.6.3]; (5) ecuación matricial con traza, $\det(A^{-1})$ [U6; ejercicio 6.5.5]; (6) ¿es grupo? (operación en pares ordenados) [U7; ejercicio 7.5.3].
- **Tipo B:** (1) inducción [U2]; (2) raíces cúbicas con datos en cis y exponencial [U3]; (3) raíces y cota superior [U4]; (4) planteamiento (inversiones) [U5]; (5) ecuación matricial [U6; propuesto 6.6.1]; (6) ¿es grupo? [U7; propuesto 7.6.2].

2º final 2013-2

- **Tipo A:** (1) desigualdad [U2; ejercicio 2.5.6]; (2) ecuación con datos en el diagrama de Argand [U3; propuesto 3.6.4]; (3) polinomio de menor grado a partir de su gráfica [U4; ejercicio 4.5.5]; (4) planteamiento (ingenieros por especialidad) [U5; ejercicio 5.5.3]; (5) ecuación matricial [U6; propuesto 6.6.2]; (6) ¿es grupo abeliano? (operación en $\mathbb{Q}$) [U7; ejercicio 7.5.4].
- **Tipo B:** (1) desigualdad [U2]; (2) ecuación con datos en el diagrama de Argand [U3]; (3) polinomio de menor grado a partir de su gráfica [U4; propuesto 4.6.1]; (4) planteamiento (médicos por especialidad) [U5]; (5) ecuación matricial [U6]; (6) ¿es grupo abeliano? (operación en $\mathbb{Q}$) [U7; propuesto 7.6.3].

1er final 2014-1

- **Tipo A:** (1) inducción [U2; propuesto 2.6.1]; (2) ecuación con datos en el diagrama de Argand; graficar soluciones [U3; propuesto 3.6.1]; (3) raíces con raíz compleja dada $(1 - 3i)$ [U4; propuesto 4.6.6]; (4) planteamiento (panadería) [U5; propuesto 5.6.2]; (5) ecuación matricial [U6; ejercicio 6.5.4]; (6) ¿es grupo abeliano? (reales positivos) [U7; ejercicio 7.5.5].
- **Tipo B:** (1) inducción [U2]; (2) ecuación con datos en el diagrama de Argand; graficar soluciones [U3]; (3) raíces con raíz compleja dada $(-1 + 3i)$ [U4]; (4) planteamiento (panadería) [U5]; (5) ecuación matricial [U6]; (6) ¿es grupo abeliano? (reales no negativos) [U7].

2º final 2014-1

- **Tipo A:** (1) desigualdad [U2; ejercicio 2.5.7]; (2) ecuación con datos en el diagrama de Argand [U3; ejercicio 3.5.5]; (3) regla de los signos de Descartes; factores lineales [U4; ejercicio 4.5.6]; (4) solución general y particular [U5]; (5) ecuación matricial con A^*, transpuesta, inversa y determinante [U6; propuesto 6.6.3]; (6) idéntico e inversos de dos operaciones en $\mathbb{R}$ [U7; ejercicio 7.5.6].
- **Tipo B:** (1) desigualdad [U2; propuesto 2.6.5]; (2) ecuación con datos en el diagrama de Argand [U3]; (3) regla de los signos de Descartes; factores lineales [U4; propuesto 4.6.4]; (4) solución general y particular [U5; propuesto 5.6.4]; (5) ecuación matricial con A^*, transpuesta, inversa y determinante [U6]; (6) idéntico e inversos de dos operaciones en $\mathbb{R}$ [U7].

7.4 Ejemplo resuelto

Ejemplo resuelto · ¿Es grupo $(\mathbb{Z}, \oplus)$?

Adaptado de: 2º final 2010-2, problema 7.

Sea $\mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros con la operación $a \oplus b = a + 2ab + b$ para todos $a, b \in \mathbb{Z}$. Determine si $(\mathbb{Z}, \oplus)$ es un grupo.

Resolución.

1. **Cerradura.** Se cumple: sumas y productos de enteros son enteros, así que $a + 2ab + b \in \mathbb{Z}$.
2. **Asociatividad.** Se cumple:

$$\begin{aligned}(a \oplus b) \oplus c &= (a + 2ab + b) + 2(a + 2ab + b)c + c \\ &= a + b + c + 2ab + 2ac + 2bc + 4abc, \\ a \oplus (b \oplus c) &= a + 2a(b + 2bc + c) + (b + 2bc + c) \\ &= a + b + c + 2ab + 2ac + 2bc + 4abc.\end{aligned}$$

3. **Idéntico.** Se cumple: $a \oplus e = a + 2ae + e = a$ da $e(2a + 1) = 0$, y como $2a + 1 \neq 0$ para todo entero, $e = 0 \in \mathbb{Z}$. Además $0 \oplus a = a$.
4. **Inversos.** No se cumple: $a \oplus a' = a + 2aa' + a' = 0$ da $a' = \dfrac{-a}{2a + 1}$. Para $a = 1$, $a' = -\frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$. Solo $a = 0$ y $a = -1$ tienen inverso entero (cada uno es su propio inverso).

Conclusión: $(\mathbb{Z}, \oplus)$ **no es un grupo**: no todo elemento tiene inverso en $\mathbb{Z}$. (La operación sí es conmutativa.)

Ejemplo resuelto · Anillo dado por tablas

Adaptado de: 1er final 2011-1, tipo A, problema 6.

El sistema $(A, +, *)$, con $A = \{a, b\}$, es un anillo con las operaciones

$+$	a	b
a	a	b
b	b	a

$*$	a	b
a	a	a
b	a	b

Determine: a) el cero y la unidad del anillo; b) si existen los inversos de a y de b para cada operación.

Resolución.

1. a) El **cero** es el idéntico de $+$: el renglón de a repite el encabezado ($a + a = a$, $a + b = b$) y la columna de a también. Cero: a.
2. La **unidad** es el idéntico de $*$: el renglón de b es a, b y la columna de b también ($a * b = a$, $b * b = b$). Unidad: b.
3. b) Inversos para $+$ (se busca el cero, a): $a + a = a$ y $b + b = a$. El inverso aditivo de a es a, y el de b es b.
4. Inversos para $*$ (se busca la unidad, b): $b * b = b$, así que el inverso de b es b. En el renglón de a no aparece b: a **no tiene inverso** para $*$, como corresponde al cero de un anillo.

del cero.

- Idéntico: despeja e de $a * e = a$ · inverso: despeja a' de $a * a' = e$.
- $a * b = a + b + k$: $e = -k$, $a' = -a - 2k$ · $a * b = kab$: $e = \frac{1}{k}$, $a' = \frac{1}{k^2 a}$ $(a \neq 0)$.
- $a * b = a + b + kab$: $e = 0$, $a' = \frac{-a}{1+ka}$ (no existe para $a = -\frac{1}{k}$).
- Isomorfismo: $f(a * b) = f(a) \# f(b)$ · idéntico de #: $f(e)$ · inverso de $f(a)$: $f(a')$.

1. **Cerradura.** Se cumple: $a + c$ y $bc + da$ son reales.
2. **Asociatividad.** No se cumple. Contraejemplo con $(0,1)$, $(0,1)$, $(1,0)$:

$$[(0,1)\triangle(0,1)]\triangle(1,0) = (0,0)\triangle(1,0) = (1,0),$$
$$(0,1)\triangle[(0,1)\triangle(1,0)] = (0,1)\triangle(1,1) = (1,1).$$

3. **Idéntico.** No se cumple: $(a,b)\triangle(e_1,e_2) = (a+e_1,\ be_1+e_2a) = (a,b)$ exige $e_1 = 0$ y entonces $e_2 a = b$ para todos a, b, lo cual es imposible (con $a = 0$, $b = 1$ da $0 = 1$).
4. **Inversos.** No se cumple: sin idéntico no hay inversos.
5. Observación: sí es conmutativa, porque $(c,d)\triangle(a,b) = (c+a,\ da+bc)$.

Conclusión: $(A, \triangle)$ **no es un grupo**; no cumple la asociatividad, el idéntico ni los inversos.

Ejercicio 7.5.4 · ¿Es grupo abeliano en $\mathbb{Q}$?

Adaptado de: 2º final 2013-2, tipo A, problema 6.

En $\mathbb{Q}$ se define $a \otimes b = a + b + \dfrac{ab}{2}$. Determine si $(\mathbb{Q}, \otimes)$ es un grupo abeliano.

Resolución.

1. **Cerradura.** Se cumple: sumas, productos y mitades de racionales son racionales.
2. **Asociatividad.** Se cumple: los dos lados dan

$$a + b + c + \frac{ab + ac + bc}{2} + \frac{abc}{4}.$$

3. **Idéntico.** Se cumple: $a + e + \frac{ae}{2} = a$ da $e\left(1 + \frac{a}{2}\right) = 0$ para todo a, así que $e = 0 \in \mathbb{Q}$.
4. **Inversos.** No se cumple: $a + a' + \frac{aa'}{2} = 0$ da $a' = \dfrac{-2a}{a+2}$, que no existe para $a = -2$. De hecho $(-2) \otimes b = -2 + b - b = -2 \neq 0$ para todo b.
5. **Conmutatividad.** Se cumple: la regla es simétrica en a y b.

Conclusión: $(\mathbb{Q}, \otimes)$ **no es un grupo abeliano**: -2 no tiene inverso. (Sin el -2, $(\mathbb{Q} - \{-2\}, \otimes)$ sí lo es.)

Ejercicio 7.5.5 · Grupo abeliano en los reales positivos

Adaptado de: 1er final 2014-1, tipo A, problema 6.

Sea $H = \{h \mid h > 0,\ h \in \mathbb{R}\}$ con la operación $a \boxplus b = ab$ (el producto usual, escrito con otro símbolo). Determine si $(H, \boxplus)$ es un grupo abeliano.

Resolución.

1. **Cerradura.** Se cumple: el producto de dos positivos es positivo.
2. **Asociatividad.** Se cumple: $(ab)c = a(bc)$.
3. **Idéntico.** Se cumple: $ae = a$ da $e = 1 \in H$.
4. **Inversos.** Se cumple: $aa' = 1$ da $a' = \frac{1}{a}$, que es positivo.
5. **Conmutatividad.** Se cumple: $ab = ba$.

Conclusión: $(H, \boxplus)$ **es un grupo abeliano**, con idéntico 1 e inverso $\frac{1}{a}$.

Apéndice A · Formulario

↑ Volver al índice

El examen no permite formulario ni calculadora. Este apéndice reúne los formularios de todas las unidades, en el orden del cuaderno, para repasarlos y escribirlos de memoria. Cada plan estudia solo sus unidades (sección 0.1).

A.1 Trigonometría (Unidad 1B) (solo Plan 2016)

- $180^\circ = \pi$; tabla de 0°, 30°, 45°, 60°, 90° (sección 1B.1). Positivas: I todas, II sen, III tan, IV cos.
- Ángulo de referencia: II $180^\circ - \theta$, III $\theta - 180^\circ$, IV $360^\circ - \theta$.
- $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$, $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$, $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$.
- $\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$; $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta$.
- $\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$; $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$.
- $\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$; $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$; área $\frac{1}{2}ab\operatorname{sen} C$.
- Cubo de arista a: diagonal de cara $a\sqrt{2}$, diagonal del cubo $a\sqrt{3}$.

A.2 Números reales: inducción y desigualdades (Unidad 2)

- Inducción: base $P(n_0)$ · hipótesis $P(k)$ · tesis $P(k+1)$ · conclusión.
- Sumando nuevo: término general con $n = k+1$. Lado izquierdo de $P(k+1)$ = lado izquierdo de $P(k)$ + sumando nuevo.
- Geométrica: $1+r+\cdots+r^{n-1} = \frac{r^n-1}{r-1}$ $(r \neq 1)$ · aritmética: $\sum_{j=1}^{n}[a+(j-1)d] = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$.
- $a < b$ y $c < 0 \;\Rightarrow\; ac > bc$.
- $|A| < c \iff -c < A < c \cdot |A| > c \iff A < -c$ o $A > c$ (con $c > 0$).
- $|A| < |B| \iff A^2 < B^2 \iff (A-B)(A+B) < 0 \cdot \left|\frac{A}{B}\right| = \frac{|A|}{|B|}$.
- Racional: $\frac{N}{D} < 0$ (o $\leq, >, \geq$), puntos críticos, tabla de signos; los ceros de D siempre quedan fuera.
- Un producto $(x-a)(x-b)$ con $a < b$ es negativo entre a y b, y positivo fuera.

A.3 Números complejos (Unidad 3)

- $z = a + bi = r\operatorname{cis}\theta = re^{i\theta}$; $r = \sqrt{a^2+b^2}$; $a = r\cos\theta$, $b = r\operatorname{sen}\theta$.
- i^n depende del residuo de n entre 4; $\operatorname{cis}\theta = \operatorname{cis}(\theta + 360^\circ k)$; $-r\operatorname{cis}\theta = r\operatorname{cis}(\theta + 180^\circ)$.
- $\bar{z} = a - bi = r\operatorname{cis}(-\theta)$; $z\bar{z} = |z|^2$; $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.
- $r_1\operatorname{cis}\theta_1 \cdot r_2\operatorname{cis}\theta_2 = r_1 r_2\operatorname{cis}(\theta_1+\theta_2)$; $\frac{r_1\operatorname{cis}\theta_1}{r_2\operatorname{cis}\theta_2} = \frac{r_1}{r_2}\operatorname{cis}(\theta_1-\theta_2)$.
- $(r\operatorname{cis}\theta)^n = r^n\operatorname{cis} n\theta$.
- $\sqrt[n]{r\operatorname{cis}\theta} = \sqrt[n]{r}\operatorname{cis}\frac{\theta+360^\circ k}{n}$, $k = 0, \ldots, n-1$.
- $w^{p/q} = c \Rightarrow w = \sqrt[q]{c^q}$.
- $a + bi = c + di$ si y solo si $a = c$ y $b = d$.
- $1 + i = \sqrt{2}\operatorname{cis}45^\circ$; $1 + \sqrt{3}\,i = 2\operatorname{cis}60^\circ$; $\sqrt{3} + i = 2\operatorname{cis}30^\circ$.

1. a) Condición de isomorfismo: $f(a \oplus b) = f(a) \# f(b)$, es decir, $10^{a+b-1} = 10^a \# 10^b$.
2. Con $x = 10^a$ y $y = 10^b$, que recorren $\mathbb{R}^+$: $10^{a+b-1} = \dfrac{10^a\,10^b}{10} = \dfrac{xy}{10}$.
3. Por lo tanto, $x \# y = \dfrac{xy}{10}$ para todos $x, y \in \mathbb{R}^+$.
4. b) Idéntico de $\oplus$: $a + e - 1 = a$ da $e = 1$.
5. Idéntico de #: $f(1) = 10$. Comprobación: $x \# 10 = \frac{10x}{10} = x$.

Resultado: $x \# y = \frac{xy}{10}$; idénticos 1 para $\oplus$ y 10 para #.

7.6 Ejercicios propuestos

Resuélvelos sin ver la solución. Las resoluciones completas están en el **Apéndice E, sección E.7**.

Ejercicio propuesto 7.6.1

Adaptado de: 2º final 2013-1, tipo A, problema 6.

Sea $T = \{t \mid t = 3n,\ n \in \mathbb{N}\}$ y la operación $x \star y = x + y + 4$ para todos $x, y \in T$. a) Calcule, cuando estén definidas, $9 \star 6$, $1 \star 6$ y $3 \star 3$. b) Determine si la operación es cerrada en T. c) ¿Es conmutativa en T?

Resultado: a) $9 \star 6 = 19$ y $3 \star 3 = 10$; $1 \star 6$ no está definida ($1 \notin T$). b) No es cerrada: $19 \notin T$. c) Sí es conmutativa.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 108.

Ejercicio propuesto 7.6.2

Adaptado de: 1er final 2013-2, tipo B, problema 6.

Sea $B = \{(a,b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ con la operación $(a,b) * (c,d) = (a+d,\ ad-b)$. Determine si $(B, *)$ tiene estructura de grupo; en caso contrario, determine qué propiedades no cumple.

Resultado: No es grupo: es cerrada, pero no es asociativa ni tiene idéntico (ni, por tanto, inversos). Tampoco es conmutativa.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 108.

Ejercicio propuesto 7.6.3

Adaptado de: 2º final 2013-2, tipo B, problema 6.

En $\mathbb{Q}$ se define $x \odot y = x + y + \dfrac{xy}{3}$. Determine si $(\mathbb{Q}, \odot)$ es un grupo abeliano.

Resultado: No: es cerrada, asociativa y conmutativa, con idéntico 0, pero -3 no tiene inverso ($x' = \frac{-3x}{x+3}$).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 108.

Ejercicio propuesto 7.6.4

Adaptado de: 1er final 2013-1, tipo A, problema 6.

El sistema $(\mathbb{R}, \otimes, \oplus)$ tiene estructura de campo, con $x \otimes y = x + y + 1$ y $x \oplus y = x + y + xy$ para todos $x, y \in \mathbb{R}$. Determine el elemento idéntico y el elemento inverso para la segunda operación.

obtenga la matriz X que satisface

$$\left(\tfrac{1}{4}X^T + \tfrac{i}{4}A^*\right)^T = \frac{1}{\det(2B^{-1})}\,B^{-1}.$$

Resultado: $X = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 107.

Ejercicio propuesto 6.6.4

Adaptado de: 2º final 2013-1, tipo A, problema 5.

Obtenga, si es posible, la adjunta de la matriz R que satisface $C^{-1}R = A - B$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 6 & 4 & 9 \\ -9 & -13 & -12 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Resultado: $\operatorname{adj} R = \begin{bmatrix} -5 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 107.

Ejercicio propuesto 6.6.5

Adaptado de: 1er final 2018-1, tipo C, problema 6.

Obtenga los valores de $a \in \mathbb{C}$ para que

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ a & 0 & 1 & 2 \\ 1 & a & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & a \end{vmatrix} = 0.$$

Resultado: $|A| = 3a(a^2+3)$; $a = 0$, $a = \sqrt{3}\,i$, $a = -\sqrt{3}\,i$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 107.

Ejercicio propuesto 6.6.6

Adaptado de: 2º final 2016-2, problema 6.

Obtenga la matriz X que satisface

$$(\operatorname{tr} A)\,X + \frac{1}{\det B}(\operatorname{adj} B)\,A^* = B^{-1}AX - CX,$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ i & -1 \end{bmatrix}, \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3i & 2 \end{bmatrix}.$$

Resultado: $X = \begin{bmatrix} 2 & -2i \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 108.

Apéndice C · Fe de erratas

↑ Volver al índice

Ningún examen de la asignatura tiene resolución publicada: todas las resoluciones de este cuaderno son propias. Este apéndice solo registra erratas de los *enunciados* (datos incompatibles o numeración).

C.1B · Unidad 1 · Parte B · Trigonometría: ecuaciones, triángulos e identidades (solo Plan 2016)

Sin erratas registradas en esta unidad.

C.2 · Unidad 2 · Números reales: inducción matemática y desigualdades

2º final 2013-1, tipo B, problema 1: La versión B pide demostrar $2^3 + 2(3)^3 + 2(5)^3 + \cdots + 2(2n-1)^3 = 2n^2(2n^2-1)$. Con $n = 1$ el lado derecho vale 2, así que el primer sumando debe ser $2(1)^3 = 2$, no $2^3 = 8$. Con esa corrección es el doble de la proposición de la versión A y se demuestra igual.

2º final 2010-2, problema 1: El tercer sumando aparece como $\frac{2}{27}$. Con el término general $\frac{2n+1}{3^n}$ y $n = 3$ es $\frac{7}{27}$, y solo con ese valor la igualdad se cumple para $n = 3$. En este cuaderno se escribe $\frac{7}{27}$.

C.3 · Unidad 3 · Números complejos: formas binómica, polar y exponencial; ecuaciones

Sin erratas registradas en esta unidad.

C.4 · Unidad 4 · Polinomios: raíces, factores lineales y regla de los signos de Descartes

Sin erratas registradas en esta unidad.

C.5 · Unidad 5 · Sistemas de ecuaciones lineales: planteamiento, método de Gauss y parámetros

Sin erratas registradas en esta unidad.

C.6 · Unidad 6 · Matrices y determinantes: ecuaciones matriciales, inversa y determinantes

Sin erratas registradas en esta unidad.

Unidad 7 · Estructuras algebraicas: operaciones binarias, grupos, anillos y campos (solo Plan 2010)

↑ Volver al índice

Objetivo (programa de la asignatura). El alumno analizará y manejará las operaciones binarias y sus propiedades dentro de una estructura algebraica.

Instrucciones de emergencia

- **Plan:** solo Plan 2010. En el Plan 2016 este tema está en Álgebra Lineal; si tu plan es el 2016, salta esta unidad.
- **Frecuencia:** aparece en los 17 finales del Plan 2010 (2010-1 a 2014-1), siempre como último problema: ¿es grupo o grupo abeliano? (7), operación binaria y sus propiedades (5), anillo (2), campo (2) e isomorfismo (1). Vale de 15 a 20 puntos.
- **Tiempo:** de 2 a 3 horas para esta unidad.
- **Ruta corta:**
  1. Lee la sección 7.1 y el formulario de la sección 7.8 (20 min).
  2. Sigue los ejemplos 7.4 tapando la resolución.
  3. Resuelve los ejercicios 7.5.3, 7.5.4 y 7.5.6 con cronómetro (12 min cada uno).

7.1 Conceptos y expresiones

Operación binaria. Una operación binaria $*$ en un conjunto A asigna a cada par ordenado (a, b) de elementos de A un único elemento $a * b$. Se da con una *regla* ($a * b = a + b + ab$) o con una *tabla*: el resultado de $a * b$ está en el renglón de a y la columna de b. El par $(A, *)$ se llama *sistema algebraico*.

Propiedades de una operación en $(A, *)$:

Propiedad	Se cumple si…
Cerradura	$a * b \in A$ para todos $a, b \in A$
Asociatividad	$(a * b) * c = a * (b * c)$ para todos $a, b, c \in A$
Conmutatividad	$a * b = b * a$ para todos $a, b \in A$
Elemento idéntico	existe $e \in A$ con $a * e = e * a = a$ para todo $a \in A$
Elementos inversos	para cada $a \in A$ existe $a' \in A$ con $a * a' = a' * a = e$

Si solo se cumple $e * a = a$, e es idéntico *izquierdo*; si solo $a * e = a$, idéntico *derecho*. Lo mismo con los inversos: $a * a' = e$ define un inverso derecho. El idéntico, si existe, es único; en un grupo, cada elemento tiene un único inverso.

Grupo. $(G, *)$ es un *grupo* si $*$ es cerrada y asociativa en G, tiene idéntico en G y cada elemento tiene inverso en G. Si además es conmutativa, el grupo es *abeliano*. Un *subgrupo* es un subconjunto $H \subseteq G$ que es grupo con la misma operación; basta comprobar que H no es vacío, que es cerrado y que contiene el inverso de cada uno de sus elementos.

Anillo. $(A, +, \cdot)$ es un *anillo* si:

1er final 2019-2

- **Tipo A:** (1) trigonometría (ecuación) [U1B]; (2) inducción [U2]; (3) ecuación en C [U3]; (4) raíces [U4]; (5) sistema con parámetro m [U5; ejercicio 5.5.6]; (6) ecuación matricial [U6].
- **Tipo C:** (1) trigonometría (ecuación) [U1B]; (2) inducción [U2; ejercicio 2.5.5]; (3) ecuación en C [U3]; (4) raíces de un polinomio bicuadrado [U4]; (5) parámetro y conjunto solución [U5]; (6) ecuación matricial [U6]; (7) inversa de una matriz ortogonal [U6].

2º final 2019-2

- **Versión única:** (1) trigonometría (ecuación) [U1B; propuesto 1B.6.2]; (2) desigualdad [U2; propuesto 2.6.6]; (3) ecuación en C [U3; propuesto 3.6.6]; (4) Descartes; factores con raíz $2i$ y factor dado [U4]; (5) sistema con parámetro [U5]; (6) ecuación matricial [U6].

1er final 2020-1

- **Tipo A:** (1) trigonometría (ecuación) [U1B; ejercicio 1B.5.3]; (2) inducción [U2]; (3) ecuación con datos en Argand [U3]; (4) raíz de multiplicidad 2 (k, m) [U4; ejercicio 4.5.7]; (5) conjunto solución [U5]; (6) ecuación matricial [U6].
- **Tipo C:** (1) trigonometría (ecuación) [U1B]; (2) desigualdad [U2]; (3) igualdad de complejos (a, b) [U3; ejercicio 3.5.7]; (4) Descartes y factores lineales [U4]; (5) sistema con parámetro k [U5]; (6) ecuación matricial [U6].

2º final 2020-1

- **Versión única:** (1) trigonometría (identidad) [U1B; ejercicio 1B.5.8]; (2) desigualdad [U2; ejercicio 2.5.8]; (3) ecuación en C [U3]; (4) Descartes y factores lineales [U4]; (5) sistema con parámetro α [U5]; (6) ecuación matricial [U6].

1er final 2020-2

- **Tipo A:** (1) trigonometría (ecuación) [U1B]; (2) inducción [U2; propuesto 2.6.3]; (3) ecuación con datos en Argand [U3]; (4) raíces [U4]; (5) planteamiento (renta de películas) [U5]; (6) traza, cofactor y determinante [U6].
- **Tipo C:** (1) trigonometría (ecuación) [U1B]; (2) inducción [U2]; (3) ecuación en C [U3]; (4) parámetro por raíz i y punto [U4]; (5) sistema con parámetro k [U5; propuesto 5.6.5]; (6) ecuación matricial [U6].

2º final 2024-1

- **Versión única:** (1) inducción [U2]; (2) desigualdad [U2]; (3) ecuación en C [U3]; (4) Descartes, raíces racionales, factores lineales [U4]; (5) sistema con parámetro k [U5]; (6) $\det(A - \lambda I) = 0$ ($\lambda \in \mathbb{C}$) [U6].

2º final 2024-2

- **Versión única:** (1) trigonometría (perímetro) [U1B]; (2) inducción [U2]; (3) ecuación en C [U3]; (4) Descartes, raíces racionales, factor irracional [U4]; (5) parámetros a, b, c y tipo de sistema [U5]; (6) inversa de una matriz [U6]; (7) determinante [U6].

1er final 2025-2

- **Tipo B:** (1) trigonometría (ley de senos, postes) [U1B]; (2) desigualdad [U2]; (3) ecuación en C [U3]; (4) divisibilidad, raíces y factores [U4]; (5) conjunto solución [U5]; (6) ecuación matricial [U6].

2º final 2026-1

- **Versión única:** (1) trigonometría (ecuación) [U1B]; (2) inducción [U2]; (3) ecuación en C [U3]; (4) Descartes y factores lineales [U4]; (5) sistema homogéneo por Gauss; dos soluciones particulares [U5]; (6) ecuación matricial [U6].

3. **Asociatividad.** Desarrolla $(a * b) * c$ y $a * (b * c)$ por separado y compara. Si salen distintos, da un contraejemplo con números.
4. **Conmutatividad.** Compara $a * b$ con $b * a$.
5. **Idéntico.** Resuelve $a * e = a$ despejando e. El valor no debe depender de a y debe pertenecer a A; comprueba también $e * a = a$.
6. **Inversos.** Resuelve $a * a' = e$ despejando a'. Revisa para qué valores de a existe (denominador distinto de cero) y si $a' \in A$.

7.3.2 Operación dada con una tabla

1. **Cerradura:** todos los resultados de la tabla son elementos del conjunto.
2. **Idéntico:** busca el renglón que repite el encabezado de las columnas y la columna que repite el encabezado de los renglones, con el mismo elemento e.
3. **Inversos:** en el renglón de a busca la casilla con e; la columna dice a'. Comprueba que también $a' * a = e$.
4. **Conmutatividad:** la tabla es simétrica respecto a la diagonal principal.
5. **Asociatividad:** no se lee a simple vista; para negarla basta una terna con $(a * b) * c \neq a * (b * c)$.

7.3.3 ¿Es grupo? ¿Es grupo abeliano?

1. Escribe los axiomas en este orden: **cerradura**, **asociatividad**, **idéntico**, **inversos** y, si se pregunta por grupo abeliano, **conmutatividad**.
2. Para cada uno escribe «Se cumple: …» con el desarrollo general, o «No se cumple: …» con un contraejemplo.
3. Revisa todos los axiomas aunque uno falle: el enunciado suele pedir *cuáles* propiedades no se cumplen.
4. Si no hay idéntico, tampoco hay inversos.
5. Cierra con la **Conclusión**: «$(A, *)$ es (no es) un grupo (abeliano)».

7.3.4 Anillos y campos: cero, unidad e inversos

1. Identifica cuál es la primera operación (la «suma») y cuál la segunda (el «producto»); el orden lo da la escritura $(A, +, \cdot)$.
2. El **cero** es el idéntico de la primera operación; la **unidad**, el de la segunda. Se obtienen como en 7.3.1 o 7.3.2.
3. Los **inversos de la primera** existen para todos los elementos. Los **de la segunda**, para todos menos el cero (en un campo); en un anillo pueden faltar.
4. Para decidir si es anillo: grupo abeliano con la primera, cerradura y asociatividad de la segunda y **las dos** distributividades.

7.3.5 Isomorfismos: operación inducida

1. Escribe la condición $f(a * b) = f(a) \# f(b)$ con la regla de f.
2. Llama $x = f(a)$, $y = f(b)$ y despeja a y b en términos de x, y.
3. Sustituye en $f(a * b)$ para obtener $x \# y$ en términos de x y y.
4. El idéntico de # es $f(e)$, con e el idéntico de $*$. Comprueba con la regla obtenida.

Plan 2016

1er final 2016-2

- **Tipo A:** (1) trigonometría (cubo) [U1B; ejercicio 1B.5.7]; (2) inducción (producto) [U2; ejercicio 2.5.4]; (3) ecuación en forma binómica [U3]; (4) Descartes y raíces [U4]; (5) sistema 4×4: conjunto solución y tipo [U5]; (6) ecuación matricial con det, traza y diag [U6].
- **Tipo B:** (1) trigonometría (cubo) [U1B]; (2) inducción [U2]; (3) ecuación en forma binómica [U3]; (4) Descartes y raíces [U4]; (5) sistema 4×4: conjunto solución [U5]; (6) ecuación matricial [U6].
- **Tipo C:** (1) trigonometría (ecuación) [U1B; propuesto 1B.6.3]; (2) desigualdad [U2]; (3) ecuación en C [U3]; (4) polinomio a partir de su gráfica [U4]; (5) planteamiento (viviendas) [U5]; (6) determinante igual a cero (parámetro) [U6].
- **Tipo D:** (1) trigonometría (ecuación) [U1B]; (2) desigualdad [U2]; (3) ecuación en C [U3]; (4) polinomio a partir de su gráfica [U4]; (5) planteamiento (viviendas) [U5]; (6) determinante igual a cero (parámetro) [U6].

2º final 2016-2

- **Versión única:** (1) trigonometría (ecuación) [U1B; ejercicio 1B.5.4]; (2) desigualdad [U2]; (3) ecuación en forma polar [U3]; (4) Descartes y factores lineales [U4]; (5) sistema con parámetro [U5]; (6) ecuación matricial con adjunta, A^* e inversa [U6; propuesto 6.6.6].

1er final 2017-1

- **Tipo A:** (1) trigonometría (valores notables) [U1B; ejercicio 1B.5.1]; (2) inducción [U2]; (3) ecuación en forma polar [U3; propuesto 3.6.5]; (4) coeficientes por factor y raíz dados [U4]; (5) planteamiento (edades) [U5]; (6) ecuación matricial con complejos [U6].
- **Tipo B:** (1) trigonometría (valores notables) [U1B]; (2) inducción [U2]; (3) ecuación en forma polar [U3]; (4) coeficientes por factor y raíz dados [U4]; (5) planteamiento (edades) [U5]; (6) ecuación matricial con complejos [U6].
- **Tipo C:** (1) trigonometría (ecuación) [U1B]; (2) desigualdad [U2]; (3) ecuación polar con datos en Argand [U3]; (4) coeficientes por puntos de la gráfica; raíces [U4]; (5) sistema con parámetro k [U5]; (6) ecuación matricial con matriz ortogonal y A^* [U6].
- **Tipo D:** (1) trigonometría (ecuación) [U1B]; (2) desigualdad [U2]; (3) ecuación polar [U3]; (4) coeficientes por puntos; raíces [U4]; (5) sistema con parámetro [U5]; (6) ecuación matricial con matriz ortogonal [U6].

2º final 2017-1

- **Versión única:** (1) trigonometría (triángulo) [U1B; ejercicio 1B.5.5]; (2) inducción (serie geométrica) [U2]; (3) ecuación en forma polar [U3]; (4) raíces con raíz compleja dada [U4]; (5) sistema con parámetro m [U5]; (6) ecuación matricial con transpuesta y C^* [U6].

1er final 2017-2

- **Tipo A:** (1) trigonometría (perímetro de triángulo) [U1B; ejercicio 1B.5.6]; (2) inducción [U2]; (3) ecuación polar con datos en Argand [U3]; (4) polinomio de grado 4 por puntos y raíz compleja [U4]; (5) planteamiento (componentes electrónicos) [U5]; (6) ecuación matricial con det [U6].
- **Tipo B:** (1) trigonometría (perímetro de triángulo) [U1B]; (2) inducción [U2]; (3) ecuación polar con datos en Argand [U3]; (4) polinomio por puntos y raíz compleja [U4]; (5) planteamiento (componentes electrónicos) [U5]; (6) ecuación matricial con det [U6].
- **Tipo C:** (1) trigonometría (figura) [U1B]; (2) inducción [U2]; (3) ecuación con varias formas [U3]; (4) parámetro por factor dado; raíces [U4]; (5) sistema con parámetro k (tres casos) [U5; ejercicio 5.5.7]; (6) ecuación matricial con inversa y det [U6].
- **Tipo D:** (1) trigonometría (figura) [U1B]; (2) inducción [U2]; (3) ecuación con varias formas [U3]; (4) parámetro por factor dado; raíces [U4]; (5) sistema con parámetro k [U5]; (6) ecuación matricial con inversa y det [U6].

2º final 2017-2

7.5 Ejercicios de examen (resueltos)

Ejercicio 7.5.1 · Operación dada con una tabla

Adaptado de: 2º final 2010-1, tipo A, problema 6.

Sea el sistema $(\alpha, \triangle)$ con $\alpha = \{a, b, c, u\}$ y la operación $\triangle$ dada por la tabla

$\triangle$	a	b	c	u
a	b	c	u	a
b	a	u	c	b
c	u	a	b	c
u	a	b	c	u

Determine si $\triangle$: a) es cerrada; b) tiene elemento idéntico, y cuál es; c) tiene elementos inversos, y cuáles son.

Resolución.

1. a) Todas las casillas de la tabla son elementos de α: la operación **es cerrada**.
2. b) El renglón de u es a, b, c, u, igual al encabezado, y la columna de u es a, b, c, u, igual a los renglones. El idéntico es u.
3. c) En cada renglón se busca u: $a \triangle c = u$, $b \triangle b = u$, $c \triangle a = u$ y $u \triangle u = u$. Por el otro lado también: $c \triangle a = u$ y $a \triangle c = u$.
4. Inversos: $a' = c$, $b' = b$, $c' = a$ y $u' = u$. **Todos los elementos tienen inverso.**
5. Observación: la tabla no es simétrica ($a \triangle b = c$, pero $b \triangle a = a$), así que $\triangle$ no es conmutativa.

Ejercicio 7.5.2 · Operación en las mitades de los naturales

Adaptado de: 2º final 2013-1, tipo B, problema 6.

Sea $S = \left\{ s \mid s = \frac{n}{2},\ n \in \mathbb{N} \right\}$ y la operación $x \ \ y = x + y + 4$ para todos $x, y \in S$. a) Calcule, cuando estén definidas, $2 \ \ 3$, $8 \ \ 6$ y $20 \ \ 4$. b) Obtenga el elemento idéntico izquierdo de , si existe. c) ¿Es conmutativa en S? d) Obtenga el elemento inverso derecho de , si existe.

Resolución.

1. a) $2, 3, 8, 6, 20, 4 \in S$ (son $\frac{4}{2}, \frac{6}{2}, \ldots$), así que las tres están definidas: $2 \ \ 3 = \mathbf{9}$, $8 \ \ 6 = \mathbf{18}$ y $20 \ \ 4 = \mathbf{28}$.
2. Cerradura (se usa abajo): si $x = \frac{n}{2}$ y $y = \frac{m}{2}$, entonces $x \ \ y = \frac{n+m+8}{2} \in S$.
3. b) Idéntico izquierdo: $e \ \ x = e + x + 4 = x$ da $e = -4$. Pero $-4 \notin S$, cuyos elementos son positivos: **no existe** idéntico izquierdo en S.
4. c) $x \ \ y = x + y + 4 = y + x + 4 = y \ \ x$: **sí es conmutativa**.
5. d) El inverso se define respecto al idéntico; como no hay idéntico en S, **no existe** inverso derecho. (Con $e = -4$ se tendría $x' = -8 - x$, que tampoco está en S.)

Ejercicio 7.5.3 · ¿Es grupo? con pares ordenados

Adaptado de: 1er final 2013-2, tipo A, problema 6.

Sea $A = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ con la operación $(a, b) \triangle (c, d) = (a + c,\ bc + da)$. Determine si $(A, \triangle)$ tiene estructura de grupo; en caso contrario, determine qué propiedades no cumple.

Resolución.

Apéndice B · Exámenes

↑ Volver al índice

B.1 Qué vino en cada examen

Los 58 finales publicados, agrupados por aplicación. Para cada problema se indica el tema y, entre corchetes, la unidad y, si está en este cuaderno, el ejemplo, el ejercicio resuelto o el ejercicio propuesto donde se trabaja. Las versiones del mismo examen suelen ser el mismo problema con otros datos: si una versión está resuelta, la otra se practica con el mismo procedimiento.

Plan 2010

2º final 2010-1

- **Tipo A:** (1) desigualdad racional [U2]; (2) ecuación en forma binómica (igualdad de complejos) [U3; ejercicio 3.5.1]; (3) coeficientes a partir de raíces dadas; factores lineales [U4; ejercicio 4.5.1]; (4) sistema con parámetro: compatible indeterminado, solución general y particular [U5; ejercicio 5.5.5]; (5) ecuación matricial [U6; ejercicio 6.5.2]; (6) operación por tabla: cerradura, idéntico, inversos [U7; ejercicio 7.5.1].

1er final 2010-2

- **Turno matutino, tipo A:** (1) desigualdad lineal [U2; propuesto 2.6.4]; (2) ecuación con radicación (formas polar y exponencial) [U3; propuesto 3.6.2]; (3) raíces de un polinomio de grado 6 con raíz i dada [U4; ejemplo 4.4]; (4) planteamiento (compra de acero), Gauss [U5; ejercicio 5.5.1]; (5) ecuación matricial con conjugada transpuesta A^* [U6; ejercicio 6.5.3]; (6) isomorfismo entre grupos: operación inducida e idénticos [U7; ejercicio 7.5.8].
- **Turno vespertino:** (1) desigualdad racional [U2; ejemplo 2.4]; (2) ecuación con potencias en formas exponencial y polar [U3; propuesto 3.6.3]; (3) polinomio por tres puntos (sistema) y sus raíces [U4; ejercicio 4.5.2]; (4) planteamiento (compra de fruta) [U5; ejemplo 5.4]; (5) ecuación matricial con $\det A$ [U6; ejercicio 6.5.1]; (6) ¿es anillo? [U7; ejercicio 7.5.7].

2º final 2010-2

- **Versión única:** (1) inducción (suma con potencias de 1/3) [U2; ejercicio 2.5.3]; (2) raíces cuartas con datos en el diagrama de Argand [U3; ejercicio 3.5.4]; (3) polinomio con coeficientes complejos, raíz dada; factores lineales [U4; ejercicio 4.5.3]; (4) sistema homogéneo: solución general y particular [U5; ejercicio 5.5.8]; (5) determinante de orden 5 [U6; ejemplo 6.4]; (6) ecuación matricial $AX + D = C - BX$ [U6; ejemplo 6.4]; (7) ¿es grupo? ($a \oplus b = a + 2ab + b$ en $\mathbb{Z}$) [U7; ejemplo 7.4].

1er final 2011-1

- **Tipo A:** (1) inducción (suma de productos de tres consecutivos) [U2; ejercicio 2.5.1]; (2) ecuación polar con dato en el diagrama de Argand [U3]; (3) polinomio con coeficientes complejos, raíz $-2i$ dada [U4]; (4) sistema con parámetro k (tres casos) [U5; ejemplo 5.4]; (5) matriz simétrica y antisimétrica (incógnitas) [U6; ejercicio 6.5.6]; (6) anillo por tablas: cero, unidad, inversos [U7; ejemplo 7.4].

1er final 2013-1

- **Tipo A:** (1) inducción [U2; propuesto 2.6.2]; (2) módulo de un complejo con parámetro [U3; ejercicio 3.5.2]; (3) factores lineales con una raíz dada [U4; propuesto 4.6.2]; (4) planteamiento (cajas de tres productos) [U5; propuesto 5.6.1]; (5) traza de la matriz que satisface una ecuación matricial [U6]; (6) campo: idéntico e inverso de la segunda operación [U7; propuesto 7.6.4].

Ejercicio 7.5.6 · Idénticos e inversos de dos operaciones

Adaptado de: 2º final 2014-1, tipo A, problema 6.

En $\mathbb{R}$ se definen $a \otimes b = \sqrt{3}\,ab$ y $a \oplus b = a + b - 2$. Determine: a) el elemento idéntico de cada operación; b) los elementos inversos de cada operación.

Resolución.

1. a) Para $\otimes$: $\sqrt{3}\,ae = a$ para todo a da $e = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.
2. Para $\oplus$: $a + e - 2 = a$ da $e = 2$.
3. b) Para $\otimes$: $\sqrt{3}\,aa' = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ da $a' = \dfrac{1}{3a}$, para $a \neq 0$. El 0 no tiene inverso: $0 \otimes b = 0$.
4. Para $\oplus$: $a + a' - 2 = 2$ da $a' = 4 - a$, para todo $a \in \mathbb{R}$.
5. Comprobación: $\sqrt{3}\,a \cdot \frac{1}{3a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ y $a + (4 - a) - 2 = 2$.

Resultado: idénticos $\frac{\sqrt{3}}{3}$ para $\otimes$ y 2 para $\oplus$; inversos $\frac{1}{3a}$ (con $a \neq 0$) y $4 - a$.

Ejercicio 7.5.7 · ¿Es anillo? con pares ordenados

Adaptado de: 1er final 2010-2, turno vespertino, problema 6.

Sea $A = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ con

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2,\ b_1 + b_2),$$
$$(a_1, b_1) * (a_2, b_2) = (a_1 b_2,\ b_1 b_2).$$

Si $(A, +)$ es un grupo abeliano y $*$ es cerrada y asociativa en A, determine si $(A, +, *)$ es un anillo.

Resolución.

1. Falta comprobar las dos leyes distributivas. Sean $P = (a, b)$, $Q = (c, d)$ y $R = (e, f)$.
2. **Por la izquierda.** Se cumple:

$$P * (Q + R) = (a, b) * (c + e,\ d + f) = (ad + af,\ bd + bf),$$
$$P * Q + P * R = (ad,\ bd) + (af,\ bf) = (ad + af,\ bd + bf).$$

3. **Por la derecha.** Se cumple:

$$(P + Q) * R = (a + c,\ b + d) * (e, f) = (af + cf,\ bf + df),$$
$$P * R + Q * R = (af,\ bf) + (cf,\ df) = (af + cf,\ bf + df).$$

4. Observación: no es conmutativo, pues $(1, 2) * (3, 4) = (4, 8)$ y $(3, 4) * (1, 2) = (6, 8)$; tampoco tiene unidad, porque $(u_1, u_2) * (a, b) = (u_1 b,\ u_2 b)$ no puede ser (a, b) para todos a, b.

Conclusión: $(A, +, *)$ **es un anillo**, no conmutativo y sin unidad.

Ejercicio 7.5.8 · Operación inducida por un isomorfismo

Adaptado de: 1er final 2010-2, turno matutino, tipo A, problema 6.

Sean los grupos $(\mathbb{R}, \oplus)$, con $a \oplus b = a + b - 1$, y $(\mathbb{R}^+, \#)$. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(a) = 10^a$, es un isomorfismo, determine: a) la operación $\#$; b) el elemento idéntico de $\oplus$ y el de $\#$.

Resolución.

A.4 Polinomios (Unidad 4)

- Algoritmo de la división: $p = d\,q + r$. Residuo: $p(c)$. Factor: $p(c) = 0$ si y solo si $x - c$ divide a p.
- Grado n: n raíces en $\mathbb{C}$ con multiplicidad; $p(x) = a_n(x - \alpha_1)\cdots(x - \alpha_n)$.
- Coeficientes reales: $a \pm bi$ en pareja; $(x - a)^2 + b^2$ es factor.
- Raíces racionales: $\pm\frac{\text{divisores de } a_0}{\text{divisores de } a_n}$.
- Descartes: positivas $\leq$ cambios de $p(x)$; negativas $\leq$ cambios de $p(-x)$; bajan de 2 en 2.
- Cota superior: $c > 0$ con renglón de la división sintética sin negativos.
- Coeficiente principal 1: suma de raíces $= -a_{n-1}$; producto $= (-1)^n a_0$.
- Fórmula general: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Bicuadrado: $u = x^k$.

A.5 Sistemas de ecuaciones lineales (Unidad 5)

- Operaciones de renglón: $R_i \leftrightarrow R_j$; cR_i con $c \neq 0$; $R_i + cR_j$.
- Forma escalonada con último renglón $0\ 0 \mid b$:
  - $a \neq 0$: compatible determinado;
  - $a = 0$ y $b = 0$: compatible indeterminado;
  - $a = 0$ y $b \neq 0$: incompatible.
- Homogéneo: siempre compatible; tiene soluciones no triviales si hay menos pivotes que incógnitas.
- Sistema cuadrado: $\det A \neq 0$ si y solo si es compatible determinado.
- Número de parámetros de la solución general = incógnitas − pivotes.

A.6 Matrices y determinantes (Unidad 6)

- $MX = N \Rightarrow X = M^{-1}N \cdot XM = N \Rightarrow X = NM^{-1} \cdot XA - XB = X(A - B) \cdot kX = kIX$
- $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \cdot [\,A \mid I\,] \to [\,I \mid A^{-1}\,]$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \cdot (AB)^T = B^T A^T \cdot A^* = \bar{A}^T \cdot (A^T)^T = A$
- $\operatorname{tr} A = \sum a_{ii} \cdot \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA) \cdot \operatorname{tr} A^T = \operatorname{tr} A$
- $\det(AB) = \det A \det B \cdot \det A^{-1} = 1/\det A \cdot \det A^T = \det A \cdot \det(kA) = k^n \det A$
- $C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij} \cdot \det A = \sum_j a_{ij}C_{ij} \cdot \operatorname{adj} A = [C_{ij}]^T \cdot A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A$
- Simétrica $A^T = A$ · antisimétrica $A^T = -A$ · ortogonal $A^{-1} = A^T$ · hermitiana $A^* = A$ · unitaria $A^{-1} = A^*$
- A^{-1} existe $\iff \det A \neq 0$

A.7 Estructuras algebraicas (Unidad 7) (solo Plan 2010)

- Grupo: cerradura · asociatividad · idéntico $a * e = e * a = a$ · inversos $a * a' = a' * a = e$. Abeliano: además $a * b = b * a$.
- Anillo $(A, +, \cdot)$: $(A, +)$ grupo abeliano (su idéntico es el cero) · $\cdot$ cerrada y asociativa · $a(b + c) = ab + ac$ y $(a + b)c = ac + bc$.
- Con unidad: $\cdot$ tiene idéntico · conmutativo: $ab = ba$ · dominio entero: conmutativo, con unidad y $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ o $b = 0$.
- Campo: anillo conmutativo con unidad y con inverso de $\cdot$ para todo elemento distinto

Resultado: Idéntico de $\oplus$: 0. Inverso: $x' = \frac{-x}{1+x}$, para $x \neq -1$ (-1 es el cero del campo).

→ Resolución en el Apéndice E, p. 109.

Ejercicio propuesto 7.6.5

Adaptado de: Serie de ejercicios del tema 7, ejercicio 3.

Sean los grupos $(\mathbb{R}, \odot)$, con $a \odot b = a + b - \sqrt{5}$, y $(\mathbb{R}^+, *)$. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(a) = 10^a$, es un isomorfismo, determine el elemento idéntico de cada grupo.

Resultado: Idéntico de $\odot$: $\sqrt{5}$. Idéntico de $*$: $10^{\sqrt{5}}$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 109.

Ejercicio propuesto 7.6.6

Adaptado de: Serie de ejercicios del tema 7, ejercicio 10.

Sea M el conjunto de las matrices $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ con $a, b \in \mathbb{Z}$, y la operación $A \triangle B = A + B + I$, donde I es la identidad de orden 2. Determine: a) si $\triangle$ es asociativa en M; b) el elemento idéntico y los inversos.

Resultado: a) Sí. b) Idéntico $-I$; el inverso de $\operatorname{diag}(a, b)$ es $\operatorname{diag}(-a-2, -b-2)$.

→ Resolución en el Apéndice E, p. 109.

7.7 Errores frecuentes

1. **Olvidar que el idéntico debe estar en el conjunto.** En $\{x > 0\}$ con $x + y + 4$, el despeje da $e = -4$, que no pertenece al conjunto: no hay idéntico.
2. **Dar un idéntico que depende de a.** Si al despejar queda $e = \frac{b}{a}$ o algo con a, no hay idéntico: debe ser el mismo para todos.
3. **Revisar los inversos sin excepciones.** $a' = \frac{-2a}{a+2}$ no existe para $a = -2$; un solo elemento sin inverso basta para que no sea grupo.
4. **Probar la asociatividad con un ejemplo.** Un ejemplo que cumple no demuestra nada; un contraejemplo sí basta para negarla. Para afirmarla, desarrolla los dos lados en general.
5. **Detenerse en el primer axioma que falla** cuando se pide «qué propiedades no cumple».
6. **Confundir cero y unidad.** El cero es el idéntico de la *primera* operación escrita en $(A, +, \cdot)$, aunque su regla parezca un producto.
7. **Leer la tabla al revés.** $a * b$ está en el renglón de a y la columna de b.
8. **Olvidar una distributividad.** En un anillo no conmutativo hay que comprobar las dos.

7.8 Formulario de emergencia de la unidad

- Grupo: cerradura · asociatividad · idéntico $a * e = e * a = a$ · inversos $a * a' = a' * a = e$. Abeliano: además $a * b = b * a$.
- Anillo $(A, +, \cdot)$: $(A, +)$ grupo abeliano (su idéntico es el cero) · · cerrada y asociativa · $a(b + c) = ab + ac$ y $(a + b)c = ac + bc$.

- Con unidad: · tiene idéntico · conmutativo: $ab = ba$ · dominio entero: conmutativo, con unidad y $ab = 0 \Rightarrow a = 0$ o $b = 0$.
- Campo: anillo conmutativo con unidad y con inverso de · para todo elemento distinto del cero.
- Idéntico: despeja e de $a * e = a$ · inverso: despeja a' de $a * a' = e$.
- $a * b = a + b + k$: $e = -k$, $a' = -a - 2k$ · $a * b = kab$: $e = \frac{1}{k}$, $a' = \frac{1}{k^2 a}$ $(a \neq 0)$.
- $a * b = a + b + kab$: $e = 0$, $a' = \frac{-a}{1+ka}$ (no existe para $a = -\frac{1}{k}$).
- Isomorfismo: $f(a * b) = f(a) \# f(b)$ · idéntico de #: $f(e)$ · inverso de $f(a)$: $f(a')$.

7.9 Procedimiento recomendado en el examen

1. Copia el conjunto con la forma de sus elementos ($3n$, $h > 0$, (a, b)) y la regla de la operación.
2. Escribe los axiomas como encabezados, en orden, aunque no se pidan todos.
3. Para cada uno: desarrollo general si se cumple, contraejemplo numérico si no.
4. Al obtener un idéntico o un inverso, comprueba que pertenece al conjunto. El idéntico, además, no debe depender del elemento; el inverso sí depende de él (en el ejercicio 7.5.5 es $1/a$).
5. Termina con una **Conclusión** en una línea: «es (no es) un grupo abeliano porque…».

Si no se encuentra el camino, los axiomas escritos y el idéntico despejado ya valen buena parte del problema.